4.1 Las decisiones de consumo-ahorro. Modelo general.

Individuo representativo de la economía, que maximiza su utilidad a lo largo de los dos períodos en que vive.

Renta real exógena, igual a y_1, y_2.

Función de utilidad es creciente y cóncava en el consumo de cada período, con un factor de descuento temporal β, $0<\beta<1$.

Puede ahorrar unidades del bien en el período 1, recibiendo una rentabilidad real r por cada una de ellas, en el período 2.

Por el momento, suponemos asimismo que el consumidor puede pedir prestado, si así lo desea, ofreciendo su renta futura como garantía, y el préstamo se devuelve a vencimiento.

$$\underset{\{c_1, s, c_2\}}{Max} \quad U(c_1, c_2) = \ln c_1 + \beta \ln c_2 \qquad \textbf{(1)}$$

sujeto a:

$$c_1 + s = y_1$$

$$c_2 \leq (1+r)s + y_2$$

$$c_1 \geq 0, \qquad c_2 \geq 0$$

donde s es el ahorro, la parte de la renta que no se consume, **positivo (si presta) o negativo (si pide prestado), en cuyo caso c_1 excedería de la renta y_1.**

Aunque no es preciso, suponemos que el tipo de interés real r es no negativo.

Función de utilidad logarítmica tiene utilidad marginal infinita cuando el consumo es igual a cero, trabajamos sabiendo que $c_1>0$, y $c_2>0$.

Se agotan los recursos presupuestarios en cada período, por lo que las restricciones se satisfacen con igualdad.

Eliminando s, las dos restricciones se convierten en:

$$c_1(1+r) + c_2 = y_2 + (1+r)y_1 \qquad \textbf{(2)}$$

y el Lagrangiano del problema es:

$$L(c_1, s, c_2; r, y_1, y_2) = (\ln c_1 + \beta \ln c_2) + \lambda\left(y_2 + (1+r)y_1 - (1+r)c_1 - c_2\right)$$

siendo λ el multiplicador de Lagrange.

Las condiciones de óptimo son:

$$\frac{1}{c_1} - \lambda(1+r) = 0$$

$$\frac{\beta}{c_2} - \lambda = 0$$

junto con la restricción presupuestaria **(2)**. De las dos condiciones de primer orden se obtiene la *relación marginal de sustitución* entre c_1 y c_2:

$$c_2 = (1+r)\beta c_1 \tag{3}$$

que es la tasa óptima de consumo a través del tiempo: al aumentar β ó r, aumenta el ratio c_2/c_1. Decisión óptima de consumo en t=1:

$$c_1 = \frac{y_2 + (1+r)y_1}{(1+r)(1+\beta)} = \frac{y_1 + \frac{y_2}{1+r}}{1+\beta} \tag{4}$$

en función únicamente de parámetros estructurales, y cuyo numerador es el *valor presente de la secuencia temporal de renta*, que estamos suponiendo exógena.

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1} > 0 \qquad \frac{\partial c_1}{\partial y_2} > 0 \qquad \frac{\partial c_1}{\partial r} = -\frac{y_2}{(1+r)^2(1+\beta)} < 0$$

El nivel de consumo en el período presente depende de la renta corriente con una propensión igual a: $1/(1+\beta)$, menor que la unidad, pero también depende de la renta futura.

El consumo disminuirá más si se produce una reducción *permanente* de la renta corriente, que si es *transitoria.*

Un aumento en el tipo de interés reducirá el consumo del período, al favorecer la sustitución de consumo presente por consumo futuro (Preferencias).

El resto de la decisiones óptimas vienen dadas por:

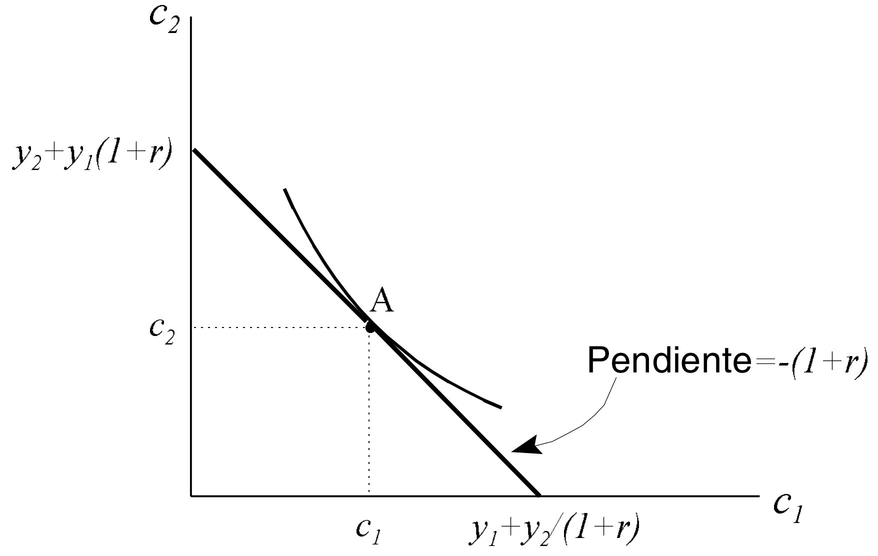


Figura 4.1

$$c_2 = \frac{\beta}{1+\beta}\left(y_2 + (1+r)y_1\right)$$

$$s = y_1 - c_1 = \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+r)(1+\beta)}$$

La restricción presupuestaria intertemporal aparece como una recta con pendiente -(1+r). Pendiente de la curva de indiferencia en un punto es: $\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\partial U/\partial c_1}{\partial U/\partial c_2} = -\frac{c_2}{\beta c_1}$, y en el punto A se tiene la igualdad entre la relación marginal de sustitución del consumo a través del tiempo, y la pendiente de la restricción presupuestaria ⇒ proporciona la máxima utilidad.

Supongamos ahora: Riqueza inicial A_0, que le proporciona a lo largo del primer período una rentabilidad a una tasa r. Al principio del segundo período su riqueza:

$$A_1 = A_0 + s_1$$

Las restricciones serán ahora:

$$c_1 + s_1 = y_1 + rA_0$$

$$c_2 \leq y_2 + A_1(1+r)$$

Eliminando s, se tiene la *restricción presupuestaria intertemporal*:

$$c_2 + c_1(1+r) = y_1(1+r) + y_2 + A_0(1+r)^2 \qquad \textbf{(5)}$$

La maximización de **(1)** sujeta a **(5)** produce como condición de óptimo la misma relación **(3)**, más la restricción **(5)**. De este modo, la función de consumo será ahora:

$$c_1 = \frac{y_2 + y_1(1+r) + A_0(1+r)^2}{(1+r)(1+\beta)}$$

con:

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1} > 0 \qquad \frac{\partial c_1}{\partial y_2} > 0 \qquad \frac{\partial c_1}{\partial A_0} > 0$$

pero

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = \frac{A_0(1+r)^2 - y_2}{(1+r)^2(1+\beta)} \lesseqgtr 0$$

Efectos renta y sustitución: en una economía desarrollada, una elevación del tipo de interés reducirá el consumo de los jóvenes (poca riqueza y unas expectativas de rentas futuras altas) y elevará el consumo de las personas mayores (cierto nivel de riqueza y reducidas expectativas de aumentar su nivel de renta en el futuro).

Las restantes decisiones óptimas son:

$$c_2 = \frac{\beta}{1+\beta}\left(y_2 + (1+r)y_1 + A_0(1+r)^2\right)$$

$$s = y_1 - c_1 = \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2 - A_0(1+r)^2}{(1+r)(1+\beta)}$$

4.1.2. Modelo con restricciones financieras.

Si los mercados financieros son imperfectos y el consumidor no puede financiar consumo presente con cargo a rentas futuras,

$$s \geq 0$$

El modelo es ahora:

$$\underset{\{c_1, s, c_2\}}{Max} \quad \ln c_1 + \beta \ln c_2$$

sujeto a:

$$c_1 + s = y_1$$

$$c_2 \leq y_2 + (1+r)s$$

$$s \geq 0$$

en el que las restricciones presupuestarias se satisfarán ambas con igualdad y los niveles de consumo óptimo serán positivos. Lagrangiano:

$$L(c_1, s, c_2; r, y_1, y_2) = (\ln c_1 + \beta \ln c_2) + \lambda\left(y_1 - c_1 - s\right) + \mu\left(y_2 + (1+r)s - c_2\right) + \gamma s$$

siendo λ, μ y γ multiplicadores de Lagrange, con las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{\beta}{c_2} - \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -\lambda + \mu(1+r) + \gamma \leq 0 \quad y \quad \frac{\partial L}{\partial s}s = \left[-\lambda + \mu(1+r) + \gamma\right]s = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = s \geq 0 \qquad y \qquad \gamma \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \gamma s = 0$$

junto con las restricciones presupuestarias de ambos períodos.

La tercera condición se convierte en:

$$s\left(\frac{\beta}{c_2}(1+r) + \left(\gamma - \frac{1}{c_1} \right) \right) = 0$$

de modo que si el nivel de ahorro óptimo es positivo: $s>0$, la cuarta condición implica: $\gamma=0$, y entonces:

$$\frac{\beta}{c_2}(1+r) - \frac{1}{c_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \beta(1+r)c_1$$

que es la ecuación de optimalidad **(3)** que obtuvimos en el caso sin restricciones.

Si, por el contrario, el ahorro óptimo resulta ser nulo: $s = 0$, se tiene: $c_1=y_1$, $c_2=y_2$, de modo que el consumo de cada período queda determinado exclusivamente por la renta de dicho período.

Puesto que la pendiente de la restricción presupuestaria es $-(1+r)$ y la pendiente de la curva de indiferencia en un punto genérico es: $\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{c_2}{\beta c_1}$, en el punto Q se tiene:

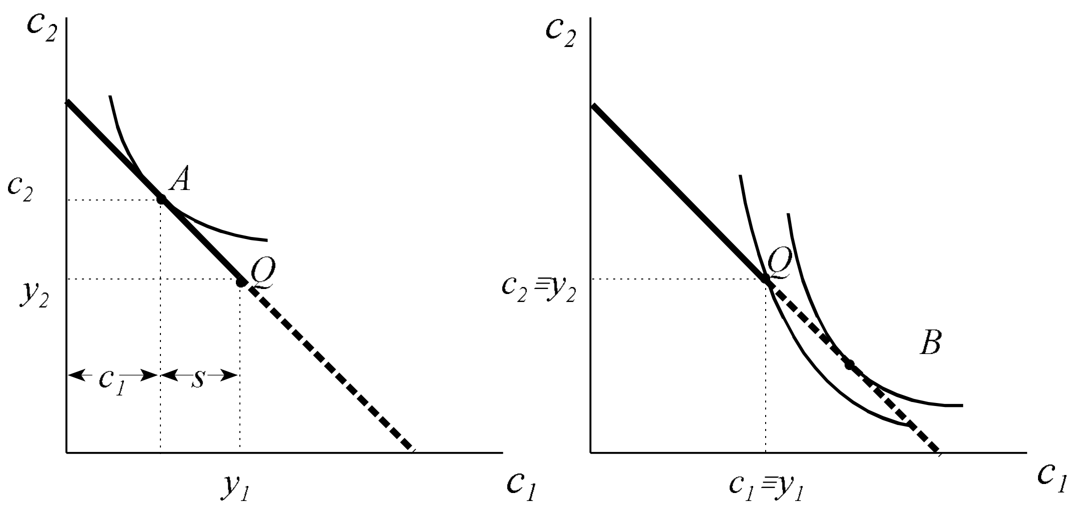


Figura 4.2

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{y_2}{\beta y_1}$$

La tangencia y, por tanto, el punto óptimo, se producirá a la izquierda de Q si la pendiente de la curva de indiferencia en Q es inferior en valor absoluto a $1+r$, es decir, si:

$$\frac{y_2}{y_1} < (1+r)\beta \qquad \Leftrightarrow \qquad y_2 < (1+r)\beta y_1$$

en cuyo caso la restricción financiera no será operativa. En caso contrario, habrá restricción financiera y el consumidor se situará en Q, con un nivel de utilidad inferior al que habría logrado de no haber estado sujeto a la restricción financiera.

4.2 El exceso de sensibilidad del consumo

Posible presencia en determinados períodos, o para determinados grupos sociales, de restricciones financieras, también denominadas en la literatura como restricciones de liquidez ⇒ se encuentra restringido en el mercado financiero ⇒ no puede trasladar renta futura al presente ⇒ el consumo viene determinado por la renta corriente.

En esta situación, el consumo no depende de ninguna medida de *renta permanente* o similar, sino estrictamente de la renta del período.

Ampliemos dicho modelo: el consumidor dispone de una riqueza inicial, A_0, pero se encuentra restringido: no puede endeudarse en el primer período por un importe superior al valor de su riqueza.

$$\underset{\{c_1, s, c_2\}}{Max} \quad \ln c_1 + \beta \ln c_2$$

sujeto a:

$$c_1 + s = y_1 + rA_0$$

$$c_2 = y_2 + (1+r)(A_0 + s)$$

$$s \geq -A_0$$

Si el ahorro óptimo resulta ser superior a -A_0, entonces la tercera restricción no es operativa, y los niveles óptimos de consumo en ambos períodos vienen determinados por:

$$c_1 = \frac{y_2 + y_1(1+r) + A_0(1+r)^2}{(1+r)(1+\beta)}$$

$$c_2 = \beta(1+r)c_1$$

Por el contrario, si el ahorro óptimo resultase ser negativo, y superior en valor absoluto a A_0, entonces no podrá llevarse a cabo, y la tercera restricción pasa a ser operativa. El consumidor ahorraría entonces exactamente -A_0, es decir, pediría prestado una cantidad igual a A_0, con consumos:

$$c_1 = y_1 + (1+r)A_0$$

$$c_2 = y_2$$

En este último caso, el consumo en el primer período está determinado por la renta corriente y por la riqueza inicial del consumidor ⇒ el consumo será muy sensible a variaciones en la renta corriente, *y* variaciones en el valor de mercado de A_0, tendrán un efecto muy directo sobre las decisiones de consumo, aumentando c_1; mucho más que sin restricciones financieras.

Primer caso: consumidor no restringido ⇒ efecto de la renta y_1 sobre el consumo c_1 es $1/(1+\beta)$.

Segundo caso: consumidor sujeto a restricciones financieras ⇒ impacto de la renta corriente sobre el consumo es 1, mayor que sin las restricciones.

El consumo depende de la renta futura cuando no hay restricciones financieras; lo contrario ocurre en el caso de restricciones, como muestran las expresiones anteriores. El impacto de la riqueza financiera sobre el consumo del primer período es, sin restricciones financieras, de $\frac{1+r}{1+\beta}$; bajo las restricciones financieras, dicho impacto es de $1+r$ y, por tanto, mayor.

La función de consumo Keynesiana

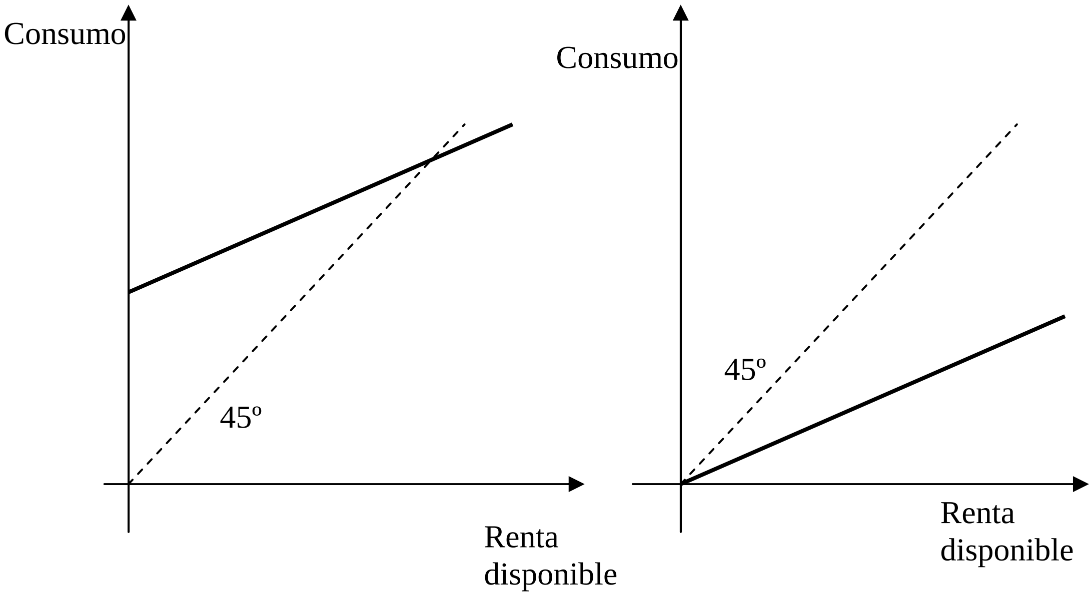
Una función de consumo Keynesiana toma la forma siguiente:

$$c = a + b\ y$$

donde c es el consumo, y es la renta (o renta disponible si hay impuestos), a es una constante positiva que denota lo que se ha dado en llamar el consumo autónomo y b es una constante definida en el intervalo (0, 1) y es denominada: *propensión marginal a consumir*.

Sin embargo, esta relación tiene dos problemas: uno de índole empírico y otro teórico:

i) Desde el punto de vista empírico: aunque para datos de sección cruzada la relación entre consumo y renta de diferentes familias dentro de un periodo dado indica que los más ricos ahorran una fracción mayor de su renta actual mayor que los más pobres, las series temporales macroeconómicas para la mayoría de los países indican que el ratio consumo agregado/renta disponible es constante en el largo plazo.



La figura de la izquierda denota la relación entre renta y consumo para datos macroeconómicos de sección cruzada y la otra denota la relación entre consumo y renta disponible para datos de series temporales macroeconómicos.

ii) Desde el punto de vista teórico, el problema de la función de consumo keynesiana está en que los resultados obtenido de nuestros problemas de optimización que hemos resuelto es que la demanda de consumo depende de la riqueza más que de la renta disponible, entendiendo riqueza como toda la renta presente y futura (en valor presente) más los activos actuales.

Friedman argumentaba que la función de consumo debería ser especificada como $c = \alpha W$, siendo W la riqueza, y α s un parámetro positivo. Según la teoría que hemos visto hasta ahora, esta función sería compatible con la demanda

de consumo del periodo 1 que hemos derivado si $\alpha = 1/(1+\beta)$, y si $W = y_1 + y_2/(1+r)$.
Si queremos que nuestra teoría sea consistente con la función de consumo keynesiana, deberíamos imponer que $a = [1/(1+\beta)][y_2/(1+r)]$ y que $b = 1/(1+\beta)$.

Dadas estas especificaciones, ambas teorías tienen una gran similitud, pero sus implicaciones son radicalmente distintas. Por ejemplo, imaginemos dos individuos que tienen la misma riqueza pero con diferentes patrones de renta a lo largo de su ciclo vital; la función de consumo de Friedman predice que ambos individuos consumirán lo mismo, mientras que la función de consumo de Keynes predice que la persona con una renta actual más alta tendría una mayor demanda de consumo.

En definitiva, la teoría que hemos desarrollado es consistente con la hipótesis de Friedman en ausencia de restricciones de crédito. Pero si los agentes tienen el crédito restringido nuestra teoría es consistente con la hipótesis de Keynes.

4.3. Incertidumbre y decisiones de consumo

Incertidumbre sobre rentas futuras, tiene aversión al riesgo (su función de utilidad es cóncava) y decide su plan para dos períodos:

$$\underset{\{c_1, s, c_2\}}{Máx} \quad E\ [U(c_1)] + \beta E\ [U(c_2)\ ] \qquad\qquad U'' < 0$$

sujeto a:

$$c_1 + s\ =\ y_1 + rA_0$$
$$c_2\ =\ y_2^e + (1+r)(A_0 + s)$$

A_0 es la riqueza financiera del consumidor;
y_2^e, es la renta no financiera en el segundo período, que es una variable aleatoria, con esperanza matemática $\overline{y}_2^e$ y desviación típica σ_y,
r es el tipo de interés al que se puede invertir el ahorro, conocido con certeza.

Si el consumidor no se encuentra restringido en el mercado de créditos, la condición de primer orden de óptimo será:

$$U'(c_1)\ =\ \beta E\ [\ U'(c_2)(1+r)\ ]\ =\ \beta(1+r)E[U'(c_2)]$$

de la que se puede derivar una función para c_1. El consumo actual aumentará con los factores que hacen disminuir $E[U'(c_2)]$ y decrecerá con los factores que hacen aumentar esa expectativa.

Apéndice A.4.1: para funciones de utilidad separables en el tiempo, de aversión relativa al riesgo constante que, como es sabido, incluye a la logarítmica como caso particular, el consumo óptimo c_1 crecerá con las expectativas de ingresos futuros, $\overline{y}_2^e$, con la renta corriente, y_1, y con la riqueza financiera neta A_0, y decrecerá con la dispersión de los ingresos esperados, σ_y^2. Los tipos de interés tienen efectos de distinto sentido, por lo que su efecto neto sobre el consumo es ambiguo.

Por tanto, la función de consumo será del tipo:

$$c_1 = C(y_1, \bar{y}_2, \sigma_y, A_0, r)$$

$$C_1>0,\ C_2>0,\ C_3<0,\ C_4>0,\ C_5 \gtrless 0$$

Un empeoramiento de la coyuntura económica y del mercado de trabajo ⇒ mayor incertidumbre sobre las rentas productivas futuras ⇒ aumento de σ_y ⇒ efecto negativo sobre el consumo presente. Si los consumidores otorgaran una probabilidad significativa a que el empeoramiento fuera permanente, disminuirá, además, la esperanza de la renta futura, y_2^e , con lo que el efecto negativo sobre el consumo sería mayor.

Si hubiera restricciones de crédito, $s \geq -B_c^*$ (donde B^*_c es la oferta máxima de créditos que el sistema está dispuesto a otorgar a las familias para su consumo) y ésta fuera efectiva, el consumidor estaría en una situación en que, para satisfacer su demanda de consumo, agota su riqueza financiera, así como el crédito que tiene disponible, por lo que su función de consumo sería:

$$c_1 = y_1 + (1+r)A_0 + B_c^*$$

donde la renta y la riqueza corrientes determinan, junto con la disponibilidad de créditos, el nivel de consumo.

Apéndice A.4.1: Determinantes de la demanda de consumo bajo incertidumbre.

Para comprobar qué función de consumo se obtendría de la condición de óptimo (6), supongamos que: $U = \dfrac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0$. Esta función de utilidad es cóncava y, cómo se puede comprobar, se caracteriza por $U' = \dfrac{1}{c^{\gamma}}, \quad -\dfrac{U''}{U'} = \dfrac{\gamma}{c}$.

Entonces,

$$U'(c_2) = \frac{1}{[y_2^e + (1+r)y_1 + (1+r)^2 A_O - (1+r)c_1]^{\gamma}} ,$$

que es una función de la forma:

$$U'(c_2) = f(y_2^e) = \frac{1}{(y_2^e + a)^{\gamma}}$$

donde: $$a = (1+r)y_1 + (1+r)^2 A_0 - (1+r)c_1$$

que puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de $\bar{y}_2^e$, la esperanza matemática de y_2^e:

$$f(y_2^e) \simeq \frac{1}{(\bar{y}_2^e + a)^{\gamma}} - \frac{\gamma}{(\bar{y}_2^e + a)^{\gamma+1}}(y_2^e - \bar{y}_2^e) + \frac{1}{2}\frac{\gamma(\gamma+1)}{(\bar{y}_2^e + a)^{\gamma+2}}(y_2^e - \bar{y}_2^e)^2$$

con lo que, tomando la esperanza matemática de la expresión anterior, se obtiene:

$$E[U'(c_2)] \simeq \frac{1}{(\bar{y}_2^e + a)^{\gamma}} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2(\bar{y}_2^e + a)^{\gamma+2}}\sigma_{y_2}^{\,2}$$

que muestra los determinantes de la esperanza $E[U'(c_2)]$, que son: la renta corriente y_1, los ingresos esperados futuros $\bar{y}_2^e$, el grado de incertidumbre en los mismos, $\sigma_{y_2}^2$, la riqueza financiera de las familias A_0, y los tipos de interés, r. Dada la relación entre el consumo óptimo c_1 y la expectativa $E[U'(c_2)]$, se deducen inmediatamente los efectos de estas variables sobre c_1, a los que se hace referencia en la Sección 4.3.

PROBLEMA DEL CONSUMIDOR BAJO INCERTIDUMBRE
Estudio de los determinantes del consumo del periodo 1.

Suponemos que la única fuente de incertidumbre proviene de la renta del segundo periodo: y_2. El consumidor conoce, al menos, la esperanza y la varianza de y_2, esto es, $\mathrm{E}(y_2)$ y $\mathrm{V}(y_2)$. Podría conocer la distribución de probabilidad de y_2, pero no es necesario para lo que sigue a continuación.

El problema del consumidor es:

$$\underset{\{c_1, c_2, s\}}{Max} \quad \mathrm{E}_1\left[U(c_1) + \beta U(c_2)\right]$$

$$\text{sujeto a: } c_1 + s = y_1 + rA_0$$

$$c_2 = y_2 + (1+r)(s + A_0)$$

$$c_1 \geq 0, \;\; c_2 \geq 0$$

donde E_1 denota la esperanza condicional a la información del periodo 1.
La condición de primer orden es:

$$U'(c_1) = \beta(1+r)\,\mathrm{E}_1\left[U'(c_2)\right].$$

Supongamos que la función de utilidad es de elasticidad de sustitución intertemporal constante:

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad t = 1, 2.$$

Entonces, la condición de primer orden será:

$$c_1^{-\sigma} = \beta(1+r)\,\mathrm{E}_1\left(c_2^{-\sigma}\right).$$

Si aproximamos la función $c_2^{-\sigma}$ por un desarrollo de Taylor de 2º orden, debemos aproximar esta función equivalente de y_2 alrededor de su valor esperado ($\mathrm{E}(y_2)$):

$$c_2^{-\sigma} = \frac{1}{\left[y_2 + (1+r)y_1 + (1+r)^2 A_0 - (1+r)c_1\right]^{\sigma}} = \frac{1}{\left[y_2 + a\right]^{\sigma}}$$

donde $a = (1+r)y_1 + (1+r)^2 A_0 - (1+r)c_1$ es determinista. La aproximación es la siguiente:

$$\frac{1}{\left[y_2 + a\right]^{\sigma}} \simeq \frac{1}{\left[\mathrm{E}_1(y_2) + a\right]^{\sigma}} + \frac{-\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2) + a\right]^{\sigma+1}}\left(y_2 - \mathrm{E}_1(y_2)\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2) + a\right]^{\sigma+2}}\left(y_2 - \mathrm{E}_1(y_2)\right)^2.$$

Por tanto, aplicando la esperanza condicional en el periodo 1 tenemos:

$$\mathrm{E}_1\left(c_2^{-\sigma}\right)=\mathrm{E}_1\left(\frac{1}{\left[y_2+a\right]^{\sigma}}\right)\simeq\frac{1}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma}}$$

$$+\frac{-\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}}\left(\mathrm{E}_1(y_2)-\mathrm{E}_1(y_2)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+2}}\mathrm{E}_1\left[\left(y_2-\mathrm{E}_1(y_2)\right)^2\right]$$

$$\simeq\frac{1}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma}}+\frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+2}}\mathrm{V}_1(y_2)$$

En conclusión, la condición de primer orden es aproximadamente igual a:

$$c_1^{-\sigma}=\beta(1+r)\left\{\frac{1}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma}}+\frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+2}}\mathrm{V}_1(y_2)\right\} \qquad (1)$$

Veamos que $c_1=f(\underset{+}{y_1},\underset{+}{\mathrm{E}_1(y_2)},\underset{-}{\mathrm{V}_1(y_2)},\underset{+}{A_0},\underset{¿?}{1+r})$.

Si diferenciamos completamente la ecuación 1, tendremos:

$$
\begin{aligned}
-\sigma c_1^{-\sigma-1} dc_1 - \frac{1}{\beta^2(1+r)} d\beta - \frac{1}{\beta(1+r)^2} d(1+r) = {} & \frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+2}} d(\mathrm{V}_1(y_2)) \\
& + \left[\frac{-\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right] d(\mathrm{E}_1(y_2)) \\
& + \left[\frac{-\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right] (1+r) dy_1 \\
& + \left[\frac{\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}} + \frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right] (1+r) dc_1 \\
& + \left[\frac{-\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right] (1+r)^2 dA_0 \\
& + \left[\frac{-\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right] \left[y_1 + 2(1+r)A_0 - c_1\right] d(1+r)
\end{aligned}
$$

o bien:

$$-\left\{\sigma c_1^{-\sigma-1}+\left[\frac{\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}}+\frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right](1+r)\right\}dc_1=\frac{1}{\beta^2(1+r)}d\beta$$

$$+\left\{\frac{1}{\beta(1+r)^2}-\left[\frac{+\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}}+\frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right]\left[y_1+2(1+r)A_0-c_1\right]\right\}d(1+r)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+2}}d(\mathrm{V}_1(y_2))$$

$$-\left[\frac{\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}}+\frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right]d(\mathrm{E}_1(y_2))$$

$$-\left[\frac{\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}}+\frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right](1+r)dy_1$$

$$-\left[\frac{\sigma}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+1}}+\frac{1}{2}\frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{\left[\mathrm{E}_1(y_2)+a\right]^{\sigma+3}}\right](1+r)^2dA_0$$

por tanto,

$$\frac{dc_1}{d\beta} < 0$$

$$\frac{dc_1}{d\mathrm{V}_1(y_2)} < 0$$

$$\frac{dc_1}{d(1+r)} \gtreqless 0$$

$$\frac{dc_1}{dA_0} > 0$$

$$\frac{dc_1}{dy_1} > 0$$

$$\frac{dc_1}{d\mathrm{E}_1(y_2)} > 0$$

La demanda de consumo caracterizada como un paseo aleatorio (Hall, 1978[1])

Sea el siguiente problema del hogar representativo:

$$\underset{\{c_t, A_t\}_{t=1}^{\infty}}{Max}\ E_1 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U\left(c_t\right)$$

sujeto a: $\underbrace{\left(A_t - A_{t-1}\right)}_{s_t} + c_t = y_t + r_{t-1} A_{t-1},\ t = 1, 2, ...$

A_0 dado

El lagrangiano del problema es:

$$\mathscr{L} = E_1 \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U\left(c_t\right) + \beta^t \lambda_t \left[y_t + r_{t-1} A_{t-1} - \left(A_t - A_{t-1}\right) - c_t \right] \right\}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\left.\begin{aligned} U'(c_t) &= \lambda_t, \\ \lambda_t &= \beta(1 + r_t) E_t(\lambda_{t+1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U'(c_t) = \beta(1 + r_t) E_t\left[U'(c_{t+1})\right] \rightarrow \text{Condición de Euler.}$$

Si $U\left(c_t\right) = a\, c_t - \dfrac{b}{2} c_t^2 \Rightarrow U'(c_t) = a - b\, c_t$.

Si aplicamos esta función de utilidad a la condición de Euler, tenemos que:

$$a - b\, c_t = \beta(1 + r_t) E_t\left[a - b\, c_{t+1}\right] \underset{\text{Si } \beta^{-1} = (1 + r_t),\ \forall t}{\Rightarrow} c_t = E_t\left[c_{t+1}\right] \Rightarrow$$

$$c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1}, \text{ donde } \varepsilon_t \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2) \Rightarrow$$

$\boxed{\text{El consumo sigue un paseo aleatorio.}}$

[1] Hall, Robert, (1978), "Stochastic Implications of the Life Cycle Permanent Income hipótesis: Theory and Evidence", *Journal of Political Economy*, 86, 5 (oct), 971-987.

HIPÓTESIS DE LA RENTA PERMANENTE

Sea el siguiente problema del hogar representativo:

$$\underset{\{c_t, A_t\}_{t=1}^{\infty}}{Max} \sum_{t=1}^{T} \beta^t U(c_t)$$

sujeto a: $\quad \underbrace{(A_t - A_{t-1})}_{s_t} + c_t = y_t + r_{t-1}A_{t-1}, \; t = 1, 2, ...$

$\qquad A_0$ dado

La condición de Euler asociada a este problema es:

$$U'(c_t) = \beta(1+r_t)U'(c_{t+1}) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Si } U(c_t)=\ln c_t} c_{t+1} = \beta(1+r_t)c_t$$

La condición terminal implica que, o bien A_T es cero o su valor es cero, es decir,

$$\lambda_T A_T = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{De la CPO:} \\ \lambda_t = (1+r_t)\lambda_{t+1} \Rightarrow \\ \lambda_T = \lambda_0 \prod_{s=0}^{T-1}(1+r_0) \\ \text{Si normlizamos } \lambda_0 = 1}} \frac{A_T}{\prod_{s=0}^{T-1}(1+r_0)} = 0.$$

Agregamos las restricciones presupuestarias para obtener la restricción presupuestaria en valor presente:

Si $t=1$: $\quad c_1 + A_1 - A_0 = y_1 + r_0 A_0 \Rightarrow A_1 = y_1 + (1+r_0)A_0 - c_1 \Rightarrow$

$$\frac{A_1}{(1+r_0)} = \frac{y_1 - c_1}{1+r_0} + A_0.$$

Si $t=2$: $\quad c_2 + A_2 - A_1 = y_2 + r_1 A_1 \Rightarrow A_2 = y_2 + (1+r_1)A_1 - c_2 \Rightarrow$

$$\frac{A_2}{(1+r_0)(1+r_1)} = \frac{y_2 - c_2}{(1+r_0)(1+r_1)} + \frac{A_1}{(1+r_0)}$$

$$= \frac{y_2 - c_2}{(1+r_0)(1+r_1)} + \frac{y_1 - c_1}{1+r_0} + A_0.$$

Si $t=3$: $\quad c_3 + A_3 - A_2 = y_3 + r_2 A_2 \Rightarrow A_3 = y_3 + (1+r_2)A_2 - c_3 \Rightarrow$

$$\frac{A_3}{(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)} = \frac{y_3 - c_3}{(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)} + \frac{A_2}{(1+r_0)(1+r_1)}$$

$$= \frac{y_3 - c_3}{(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)} + \frac{y_2 - c_2}{(1+r_0)(1+r_1)} + \frac{y_1 - c_1}{1+r_0} + A_0.$$

Si repetimos este proceso T veces, tendremos que:

$$\underbrace{\frac{A_T}{\prod_{t=0}^{T-1}(1+r_t)}}_{=0,\text{ por la condición terminal}} = A_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t - c_t}{\prod_{s=0}^{t-1}(1+r_s)} \Rightarrow$$

$$A_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{\prod_{s=0}^{t-1}(1+r_s)} = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{\prod_{s=0}^{t-1}(1+r_s)}.$$

De la condición de Euler:

$$c_{t+1} = \beta(1+r_t)c_t \Rightarrow c_t = \beta^{t-1}\left(\prod_{s=1}^{t-1}(1+r_s)\right)c_1.$$

Sustituyendo esta expresión en la restricción presupuestaria:

$$A_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{\prod_{s=0}^{t-1}(1+r_s)} = \frac{c_1}{1+r_0} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} \Rightarrow$$

$$A_0(1+r_0) + \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{\prod_{s=1}^{t-1}(1+r_s)} = c_1 \frac{1-\beta^T}{1-\beta} \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\left[A_0(1+r_0) + \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{\prod_{s=1}^{t-1}(1+r_s)} \right].$$

Si $r_t = r, \forall t,$ entonces

$$c_1 = \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\left[A_0(1+r_0) + \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^{t-1}} \right].$$

Si $y_t = W, \forall t,$ y $T \to \infty$:

$$c_1 = (1-\beta)\left[A_0(1+r_0) + W\frac{1+r}{r} \right] \underbrace{=}_{\text{Si } \beta^{-1}=1+r} W + \frac{1-\beta}{\beta} A_0 \Rightarrow$$

$c_1 = W$ si $A_0 = 0$; Esta es la hipótesis de la Renta Permanente: Si la renta es constante y la tasa de descuento es la inversa del tipo de interés bruto, el consumidor consumirá en cada instante esa renta.

IMPOSICIÓN Y EQUIVALENCIA RICARDIANA EN UNA ECONOMÍA DE DOS PERIODOS

- Sea el siguiente problema de un hogar representativo en una economía de dos periodos, en la que los hogares son gravados con impuestos de suma fija (*lump sum*) para financiar un gasto público improductivo (consumo del gobierno):

$$\underset{\{c_1, c_2, s\}}{Max} \; \ln c_1 + \beta \ln c_2$$

$$\text{sujeto a:} \qquad c_1 + s = y_1 - T_1$$

$$c_2 = y_2 - T_2 + (1+r)s$$

La solución a este problema es:

$$c_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[\left(y_1 - T_1\right) + \frac{\left(y_2 - T_2\right)}{1+r}\right]$$

$$c_2 = \frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r)\left(y_1 - T_1\right) + \left(y_2 - T_2\right)\right]$$

$$s = \frac{\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r}\left(y_1 - T_1\right)\left[(1+r) - \frac{\left(y_2 - T_2\right)}{\beta\left(y_1 - T_1\right)}\right]$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial T_1} = -\frac{1}{1+\beta}; \quad \frac{\partial c_1}{\partial T_2} = -\frac{1}{1+\beta}\frac{1}{1+r};$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial T_1} = -\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}; \quad \frac{\partial c_2}{\partial T_2} = -\frac{\beta}{1+\beta};$$

$$\frac{\partial s}{\partial T_1} = -\frac{\beta}{1+\beta}; \quad \frac{\partial s}{\partial T_2} = \frac{1}{1+\beta}\frac{1}{1+r};$$

Un resultado interesante: si el hogar quiere suavizar completamente su senda de consumo óptima, es decir, cuando $1+r=1/\beta$, y el hogar espera que el recorte impositivo sea permanente:

$$\frac{\partial c_1}{\partial T_1}+\frac{\partial c_1}{\partial T_2}=-1; \frac{\partial c_2}{\partial T_1}+\frac{\partial c_2}{\partial T_2}=-1; \frac{\partial s}{\partial T_1}+\frac{\partial s}{\partial T_2}=0;$$

- La restricción presupuestaria del gobierno es:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Periodo 1:} & B_1+G_1=T_1+\dfrac{B_2}{1+r}\\ \text{Periodo 2:} & B_2+G_2=T_2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$B_1+G_1+\frac{G_2}{1+r}=T_1+\frac{T_2}{1+r}$$

donde B_1 es el stock de deuda viva hasta el periodo 1, predeterminado por los los déficits públicos acumulados históricamente.

Si el gobierno no reduce su gasto público actual ni el planificado para el periodo 2 (es decir, si no cambian G_1 ni G_2), un recorte impositivo hoy ($dT_1<0$) deberá ser seguido por un futuro incremento en los impuestos en el periodo 2 ($dT_2>0$), tal que:

$$dT_1+\frac{1}{1+r}dT_2=0\Rightarrow dT_1=-\frac{1}{1+r}dT_2$$

Por otro lado, de la solución para la demanda de consumo del periodo 1, tenemos que una variación en los impuestos de ambos periodos genera una variación en el consumo dada por la expresión:

$$dc_1 = -\frac{1}{1+\beta}\left(dT_1 + \frac{1}{1+r}dT_2\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{usando la}\\ \text{expresión}\\ \text{anterior}}} 0.$$

Puede comprobarse que lo mismo ocurre con el consumo del periodo 2. La implicación de este resultado es muy importante: un recorte en los impuestos actuales que no va acompañado de un recorte en los gastos actuales o futuros no tendrán ningún efecto sobre el consumo de hoy ni sobre el consumo de mañana (por supuesto, tampoco sobre el ahorro).

En otras palabras, un cambio de financiar un gasto con impuestos o con deuda es equivalente:

La restricción intertemporal del hogar es:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \left(T_1 + \frac{T_2}{1+r}\right)$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{usando la}\\ \text{restrición}\\ \text{del gobierno}}} y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \left(B_1 + G_1 + \frac{G_2}{1+r}\right)$$

Es decir, la senda de consumo sólo depende de la senda de gasto y del stock de deuda hoy, pero no de los impuestos ni del endeudamiento B_2, por lo que da igual cómo se financie el gasto: hacerlo con impuestos o con deuda es equivalente.

Sin embargo, el teorema de la Equivalencia Ricardiana sólo se da cuando los impuestos utilizados para financiar el gasto no distorsionan las decisiones de los hogares.

Un ejemplo un poco más sofisticado es el siguiente: una economía que financia el consumo público no productivo mediante impuestos sobre las rentas del trabajo. (Nótese que en este modelo hemos introducido ocio como variable de decisión por parte del hogar, lo cual implica que tendremos que obtener la oferta de trabajo para cada periodo; ahora no existen rentas exógenas)

- El problema del hogar:

$$\underset{\{c_1,c_2,n_1,n_2,s\}}{Max} \ln c_1 + \gamma \ln(1-n_1) + \beta\left[\ln c_1 + \gamma \ln(1-n_2)\right]$$

sujeto a:

$$c_1 + s = \omega_1 n_1 - \tau_1 \omega_1 n_1 - T_1,$$
$$c_2 = (1+r)s + \omega_2 n_2 - \tau_2 \omega_2 n_2 - T_2$$

La restricción presupuestaria intertemporal del hogar es:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (1-\tau_1)\omega_1 n_1 - T_1 + \frac{(1-\tau_2)\omega_2 n_2 - T_2}{1+r} \Leftrightarrow$$
$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = \omega_1 n_1 + \frac{\omega_2 n_2}{1+r} - \left[\tau_1 \omega_1 n_1 + T_1 + \frac{\tau_2 \omega_2 n_2 + T_2}{1+r}\right]$$

La solución a este problema es:

$$c_1 = \frac{1}{(1+\beta)(1+\gamma)}\left[(1-\tau_1)\omega_1 - T_1 + \frac{(1-\tau_2)\omega_2 - T_2}{1+r}\right],$$

$$c_2 = \frac{\beta}{(1+\beta)(1+\gamma)}\left[(1+r)\left((1-\tau_1)\omega_1 - T_1\right) + (1-\tau_2)\omega_2 - T_2\right],$$

$$n_1 = 1 - \frac{\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)}\left[1 + \frac{(1-\tau_2)\omega_2}{(1+r)(1-\tau_1)\omega_1} - \left(T_1 + \frac{T_2}{1+r}\right)\right] \Rightarrow n_1 = n_1(\tau_1, \tau_2, T_1, T_2),$$

$$n_2 = 1 - \frac{\gamma\beta}{(1+\beta)(1+\gamma)}\left[\frac{(1+r)(1-\tau_1)\omega_1}{(1-\tau_2)\omega_2} + 1 - \left((1+r)T_1 + T_2\right)\right] \Rightarrow n_2 = n_2(\tau_1, \tau_2; T_1, T_2),$$

$$s = \frac{\beta\left((1-\tau_1)\omega_1 - T_1\right)}{(1+\beta)(1+r)}\left[(1+r) - \frac{\left((1-\tau_2)\omega_2 - T_2\right)}{\beta(1-\tau_1)\omega_1}\right].$$

- La restricción presupuestaria del gobierno:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Periodo 1:} & B_1 + G_1 = T_1 + \tau_1\omega_1 n_1(\tau_1, \tau_2, T_1, T_2) + \dfrac{B_2}{1+r} \\ \text{Periodo 2:} & B_2 + G_2 = T_2 + \tau_2\omega_2 n_2(\tau_1, \tau_2, T_1, T_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$B_1 + G_1 + \frac{G_2}{1+r} = T_1 + \tau_1\omega_1 n_1(\tau_1, \tau_2, T_1, T_2) + \frac{T_2 + \tau_2\omega_2 n_2(\tau_1, \tau_2, T_1, T_2)}{1+r}$$

donde B_1 es el stock de deuda viva hasta el periodo 1, predeterminado por los los déficits públicos acumulados históricamente.

Si el gobierno no reduce su gasto público actual ni el planificado para el periodo 2 y no toca los impuestos sobre la renta salarial de ambos periodos (es decir, si no cambian G_1 ni G_2 ni τ_1 ni τ_2), un recorte impositivo en el impuesto de suma fija actual ($dT_1 < 0$) deberá ser seguido por un futuro incremento en el impuesto de suma fija del periodo 2 ($dT_2 > 0$), tal que:

$$dT_1 + \frac{1}{1+r}dT_2 = 0 \Rightarrow dT_1 = -\frac{1}{1+r}dT_2 .$$

Demostración:
Diferenciando la restricción del gobierno en valor presente dada en la página anterior respecto de T_1 y de T_2 se tiene que:

$$0 = \underbrace{\left[1 + \left(\tau_1\omega_1 + \beta\tau_2\omega_2\right)\frac{\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)}\right]}_{\neq 0}\left[dT_1 + \frac{dT_2}{1+r}\right] \Rightarrow$$

$$0 = dT_1 + \frac{dT_2}{1+r}$$

Por otro lado, de la solución para la demanda de consumo del periodo 1, tenemos que una variación en los impuestos de suma fija de ambos periodos genera una variación en el consumo dada por la expresión:

$$dc_1 = -\frac{1}{(1+\beta)(1+\gamma)}\left(dT_1 + \frac{1}{1+r}dT_2\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{usando la}\\ \text{expresión}\\ \text{anterior}}} 0.$$

Puede comprobarse que lo mismo ocurre con el consumo del periodo 2. La implicación de este resultado es muy importante: un recorte en los impuestos de suma fija no distorsionantes actuales que no va acompañado de un recorte en los gastos actuales o futuros (ni cambios en los impuestos sobre las rentas salariales), no tendrá ningún efecto sobre el consumo de hoy ni sobre el consumo de mañana (por supuesto, tampoco sobre el ahorro).

Ahora bien, un recorte impositivo sobre la renta salarial dejando invariante el consumo público de ambos periodos y dejando también invariante los impuestos de suma fija, será seguido de un aumento en el impuesto sobre la renta salarial del segundo periodo de tal forma que:

$$d\tau_1 = -\frac{\dfrac{\omega_2 n_2}{1+r} + \dfrac{\tau_2\omega_2}{1+r}\dfrac{\partial n_2}{\partial \tau_2} + \tau_1\omega_1\dfrac{\partial n_1}{\partial \tau_2}}{\omega_1 n_1 + \tau_1\omega_1\dfrac{\partial n_1}{\partial \tau_1} + \dfrac{\tau_2\omega_2}{1+r}\dfrac{\partial n_2}{\partial \tau_1}} d\tau_2$$

Demostración: al igual que antes, si se diferencia la restricción del gobierno en valor presente respecto de ambos impuestos sobre la renta salarial, se obtiene dicha expresión.

El efecto sobre la demanda de consumo de esta variación impositiva es:

$$dc_1 = -\frac{\omega_1}{(1+\beta)(1+\gamma)}\left[d\tau_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1(1+r)}d\tau_2\right] \neq 0$$

es decir, el consumo variará en cualquier caso, por lo que aquí se rompe el resultado de la equivalencia ricardiana (el cambio en el consumo sólo será igual a cero si $\dfrac{\partial n_2}{\partial \tau_2} = \dfrac{\partial n_1}{\partial \tau_2} = \dfrac{\partial n_2}{\partial \tau_1} = \dfrac{\partial n_1}{\partial \tau_1}$=0 y si $\beta^{-1} = 1+r$, es decir, sólo cuando el impuesto es no distorsionante).

En otras palabras, un cambio de financiar un gasto con impuestos o con deuda no es equivalente cuando alguno de los instrumentos impositivos utilizados en la política fiscal es distorsionante:

La restricción intertemporal del hogar es:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = \omega_1 n_1(\tau_1,\tau_2,T_1,T_2) + \frac{\omega_2 n_2(\tau_1,\tau_2,T_1,T_2)}{1+r} - \left[\tau_1\omega_1 n_1(\tau_1,\tau_2,T_1,T_2) + T_1 + \frac{\tau_2\omega_2 n_2(\tau_1,\tau_2,T_1,T_2) + T_2}{1+r}\right] \Rightarrow$$

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} \underbrace{=}_{\substack{\text{usando la}\\\text{restrición}\\\text{del gobierno}}} \omega_1 n_1(\tau_1,\tau_2,T_1,T_2) + \frac{\omega_2 n_2(\tau_1,\tau_2,T_1,T_2)}{1+r} - \left(B_1 + G_1 + \frac{G_2}{1+r}\right) \Rightarrow$$

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = \omega_1 \hat{n}_1(\tau_1,\tau_2) + \frac{\omega_2 \hat{n}_2(\tau_1,\tau_2)}{1+r} - \left(B_1 + G_1 + \frac{G_2}{1+r}\right) +$$

$$\frac{(\omega_1 + \beta\omega_2)\frac{\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)}}{1 + (\tau_1\omega_1 + \beta\tau_2\omega_2)\frac{\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)}}\left[B_1 + G_1 + \frac{G_2}{1+r} - \left(\tau_1\omega_1\hat{n}_1(\tau_1,\tau_2) + \frac{\tau_2\omega_2\hat{n}_2(\tau_1,\tau_2)}{1+r}\right)\right],$$

donde
$$\begin{cases} \hat{n}_1(\tau_1,\tau_2) = 1 - \dfrac{\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)}\left[1 + \dfrac{(1-\tau_2)\omega_2}{(1+r)(1-\tau_1)\omega_1}\right] \\ \hat{n}_2(\tau_1,\tau_2) = 1 - \dfrac{\gamma\beta}{(1+\beta)(1+\gamma)}\left[\dfrac{(1+r)(1-\tau_1)\omega_1}{(1-\tau_2)\omega_2} + 1\right] \end{cases}$$

es decir, la senda de consumo depende no sólo de la senda de gasto y del stock de deuda hoy, sino también de los tipos impositivos sobre la renta salarial que distorsionan la decisión de oferta de trabajo en ambos periodos. Sin embargo, los impuestos de suma fija no aparecen: esto implica que usar deuda o impuestos de suma fija es equivalente para financiar una secuencia de gasto pero no usar impuestos sobre la renta cuando ésta es endógena.

4.4 Las decisiones de consumo y ocio en un contexto intertemporal

La renta que recibe el consumidor tiene un componente endógeno, resultado del trabajo que ofrece, que es remunerado a un nivel salarial dado. El consumidor deriva utilidad de su consumo, así como del ocio de que disfruta en ambos períodos.

Función de utilidad separable, en el tiempo, y en los dos bienes, consumo y ocio:

$$U(c_1, 24 - n_1, c_2) = c_1 (24 - n_1)^{\gamma} \left(c_2 24^{\gamma}\right)^{\beta}$$

Transformada logarítmica de esta función de utilidad:

$$U(c_1, 24 - n_1, c_2) = \ln(c_1) + \gamma \ln(24 - n_1) + \beta \ln(c_2) + \beta \gamma \ln(24)$$

El consumidor escoge los valores de las variables c_1, s, n_1 y c_2, que maximicen esta función, sujeta a las restricciones:

En t=1 : $c_1 + s + (24\text{-}n_1)\omega = y_1 + 24\ \omega$

Esta restricción suele utilizarse más frecuentemente escrita del siguiente modo:

$$c_1 + s = y_1 + \omega\, n_1 \qquad \textbf{(7)}$$

En t=2 : $c_2 \leq s\ (1+r) + y_2$ **(8)**

donde s denota el número de unidades ahorradas en t=1 (ahorro real).

$$L(c_1, s, n_1, c_2, \lambda, \mu\,; r, \omega) =$$
$$= \ln c_1 + \gamma \ln(24 - n_1) + \beta \ln c_2 + \lambda\left(y_1 + \omega_1 n_1 - c_1 - s\right) + \mu\left(y_2 + s(1+r) - c_2\right)$$

Si el número de horas trabajadas en t=1 es no nulo,

$$\frac{1}{c_1} - \lambda = 0$$

$$-\frac{\gamma}{24 - n_1} + \lambda\omega = 0$$

$$-\lambda + \mu(1+r) = 0$$

$$\frac{\beta}{c_2} - \mu = 0$$

que conducen a:

$$c_2 = \beta(1+r)c_1$$

junto con:

$$\frac{\gamma/(24-n_1)}{1/c_1} = \omega \qquad es \quad decir \ : \qquad \frac{\gamma}{24 - n_1} = \frac{\omega}{c_1}$$

Primera condición: igualdad entre relación marginal de sustitución del consumo en el tiempo y su precio relativo (tipo de interés real bruto). Es óptimo reducir el consumo en t=1 cuando el tipo de interés real es alto ⇒ el consumo sacrificado (ahorro) producirá unos elevados recursos en t=2, y viceversa.

Segunda condición: iguala la relación marginal de sustitución entre ocio y consumo en t=1 su precio relativo (salario real). El consumidor puede sacrificar una hora adicional de ocio, trabajando y ganando un salario ω ⇒ desutilidad marginal igual a $\gamma/(24-n_1)$ ⇒ podría comprar ω unidades del bien de consumo, cada una de las cuales ⇒ utilidad marginal de $1/c_1$. Estas pérdidas y ganancias marginales de utilidad deben ser iguales cuando se evalúan a partir de los niveles óptimos.

De las restricciones presupuestarias para ambos períodos se obtiene:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} + \omega n_1 = VPRY + \omega n_1$$

donde $VPRY$ denota el valor presente de la secuencia de renta exógena del consumidor. Teniendo en cuenta la primera condición de óptimo:

$$c_1(1+\beta) = VPRY + \omega n_1$$

y utilizando la segunda condición de óptimo para sustituir n_1 en función de c_1:

$$n_1 = 24 - \frac{\gamma}{\omega} c_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma c_1 = 24\omega - \omega n_1$$

llegamos a:

$$c_1(1+\beta) = VPRY + 24\omega - \gamma c_1$$

es decir:

$$c_1 = \frac{VPRY + 24\omega}{1+\gamma+\beta}$$

siendo 24ω el valor presente de la renta salarial máxima. En esta expresión se observa que la *propensión marginal a consumir* incrementos de renta exógena = $1/(1+\beta+\gamma) < 1$.

El consumo del primer período:

a) *aumenta con el valor presente de la secuencia de renta exógena.*

b) *aumenta con el salario.*

c) *disminuye al aumentar el tipo de interés real*, pues entonces resulta más atractivo consumir menos y ahorrar dichos recursos.

Utilizando ahora la relación entre los valores óptimos de n_1 y c_1, tenemos la oferta de trabajo:

$$24 - \frac{\gamma}{\omega} c_1 = 24 - \frac{\frac{\gamma}{\omega} VPRY + 24\gamma}{1+\gamma+\beta} = 24 - \frac{\frac{\gamma}{\omega}\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right) + 24\gamma}{1+\gamma+\beta} = 24\frac{1+\beta}{1+\gamma+\beta} - \frac{\gamma}{\omega}.$$

que muestra que la oferta de trabajo en t=1:

a) *disminuye al aumentar el valor presente de la secuencia de renta* exógena,

b) *aumenta con el salario real.*

c) *aumenta con el tipo real de interés,* pues incentiva el ahorro, para lo cual es preferible disponer de una mayor renta en t=1.

Ahora podemos utilizar la restricción presupuestaria del período t=1 para obtener el nivel óptimo de ahorro:

$$s = y_1 + \omega n_1 - c_1 = y_1 + 24\omega - \gamma c_1 - c_1 = y_1 + 24\omega - \frac{1+\gamma}{1+\gamma+\beta}(VPRY + 24\omega) =$$

$$= \frac{\beta}{1+\gamma+\beta} y_1 - \frac{1+\gamma}{1+\gamma+\beta} \frac{1}{1+r} y_2 + 24\omega \frac{\beta}{1+\gamma+\beta}$$

que muestra que el ahorro óptimo:

a) *aumenta con la renta exógena del período actual, pero disminuye al aumentar la renta exógena futura*,

b) *aumenta con el salario*

c) *aumenta al elevarse el tipo de interés*, que es la rentabilidad del ahorro.

Finalmente, el nivel óptimo de consumo en t=2 viene dado por:

$$c_2 = \frac{\beta}{1+\beta+\gamma} (1+r) \left(VPRY + 24\omega\right) =$$

$$= \frac{\beta}{1+\gamma+\beta}\left(y_1(1+r) + y_2\right) + \frac{\beta}{1+\gamma+\beta} 24\omega(1+r)$$

con las propiedades:

a) *aumenta al crecer el salario,*

b) *aumenta con el tipo de interés real,*

c) *aumenta al crecer la renta real* de ambos períodos. La *propensión marginal al consumo* es igual a la del primer período, el inverso de 1+γ+β.

4.5. Efectos de distintas políticas impositivas

4.5.1 Impuesto proporcional sobre el consumo

Supongamos que se impone un impuesto proporcional, a tasa τ, sobre la cantidad del bien consumido en el primer período. El problema de maximización es:

$$\underset{\{c_1, s, n_1, c_2\}}{Máx} \quad U(c_1, 24-n_1, c_2) = \ln(c_1) + \gamma \ln(24-n_1) + \beta \ln(c_2)$$

sujeto a:

$$(1+\tau)\, c_1 + s = y_1 + \omega n_1$$

que indica que el gasto en consumo, más el ahorro, es igual al agregado de la renta exógena y_1, y la renta salarial, ωn_1, y:

$$c_2 \leq s\,(1+r) + y_2$$

Deduciendo las condiciones de optimalidad de modo análogo al anterior, se prueba que la presencia del impuesto sobre el consumo altera ambas relaciones marginales de sustitución (*RMS*). En el caso de la *RMS* entre t=1 y t=2, tenemos ahora:

$$c_2 = \beta(1+r)(1+\tau)c_1$$

mientras que la *RMS* consumo-ocio en t=1 proporciona ahora:

$$c_1 = \frac{\omega}{\gamma} \frac{1}{1+\tau} (24-n_1)$$

Un análisis similar al efectuado en los modelos anteriores, permite probar que el efecto de este impuesto sobre el consumo consiste en *disminuir, en la proporción del impuesto* las cantidades consumidas en el primer período. En efecto, si denotamos por c_1', c_2', n', s', los valores óptimos de las variables de decisión bajo impuestos sobre la renta, tenemos:

$$c_1{}' = \frac{1}{1+\gamma+\beta}\frac{VPRY+24\omega}{1+\tau}$$

$$c_2{}' = \frac{\beta}{1+\beta+\gamma}(1+r)\left(VPRY+24\omega\right) = c_2$$

El impuesto sobre el consumo ⇒ disminuir el nivel de consumo del período en el que dicho impuesto existe, pero: *el gasto en consumo es el mismo con impuesto sobre el consumo es el mismo que sin el impuesto, si bien el nivel de consumo es inferior.*

No ha cambiado la *propensión marginal a consumir*, que continúa siendo el inverso de 1+γ+β, pero ahora se ve claramente que, en t=1, es una propensión marginal a consumir de la renta disponible, no de la renta total.

No varían las horas de trabajo y ocio, $n_1{}'=n_1$, [ejercicio].

El nivel de ahorro es igual a:

$$s' = y_1 + \omega n_1{}' - (1+\tau)c_1{}' = y_1 + 24\omega - \gamma(1+\tau)c_1{}' - (1+\tau)c_1{}' =$$

$$= y_1 + 24\omega - (1+\gamma)(1+\tau)c_1{}' = y_1 + 24\omega - \frac{1+\gamma}{1+\gamma+\beta}(VPRY+24\omega) = s$$

el mismo que en ausencia de impuestos sobre el consumo. Tan sólo el consumo que está sujeto a impuestos, el del primer período, se ve afectado por los mismos.

4.5.2 Impuesto proporcional sobre la renta

Supongamos ahora que, como alternativa al impuesto sobre el consumo, se implanta un impuesto proporcional sobre la renta del primer período, a una tasa α. El problema de optimización es ahora:

$$\underset{\{c_1,s,n_1,c_2\}}{Máx} \quad U(c_1, 24-n_1, c_2) = \ln(c_1) + \gamma\ln(24-n_1) + \beta\ln(c_2)$$

sujeto a:

$$c_1 + s = (1\text{-}\alpha)\,(y_1 + \omega\, n_1)$$

que indica que el gasto en consumo, más el ahorro, no pueden exceder del agregado, después de impuestos, de la renta exógena y_1, y la renta salarial, $\omega\, n_1$, y:

$$c_2 = s\,(1{+}r) + y_2$$

Condiciones de optimalidad:

$$c_2 = \beta(1+r)c_1 \tag{9}$$

mientras que altera la *Relación Marginal de Sustitución* entre consumo y ocio en t=1 que es ahora:

$$\frac{\gamma}{24-n_1} = (1-\alpha)\omega\frac{1}{c_1}$$

De las restricciones presupuestarias para ambos períodos se obtiene la restricción presupuestaria intertemporal:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (1-\alpha)(y_1+\omega n_1) + \frac{y_2}{1+r}$$

es decir:

$$c_2 = y_2 + (1+r)(1-\alpha)y_1 + (1+r)(1-\alpha)\omega n_1 - (1+r)c_1 \tag{10}$$

Por otra parte, de la segunda condición de óptimo, tenemos:

$$\gamma c_1 = (1-\alpha)24\,\omega - (1-\alpha)\omega n_1$$

es decir:

$$(1-\alpha)\omega n_1 = (1-\alpha)24\,\omega - \gamma c_1$$

y sustituyendo ambas condiciones de óptimo en la restricción presupuestaria intertemporal (10), tenemos:

$$(1+\beta)(1+r)c_1 = y_2 + (1+r)(1-\alpha)y_1 + (1+r)\left[(1-\alpha)24\omega - \gamma c_1\right]$$

y, denotando por c_1'', c_2'', n'', s'', las decisiones óptimas bajo impuestos sobre la renta,

$$c_1'' = \frac{1}{1+\gamma+\beta}\left[(1-\alpha)y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right] + 24\omega(1-\alpha)\frac{1}{1+\gamma+\beta} < c_1$$

$$c_2'' = \frac{\beta}{1+\gamma+\beta}\left[(1-\alpha)(1+r)y_1 + y_2\right] + 24\omega(1-\alpha)\frac{\beta}{1+\gamma+\beta}(1+r) < c_2$$

y:

$$n_1'' = 24 - \frac{\gamma}{1+\gamma+\beta}\left[\frac{y_1}{\omega} + \frac{y_2}{(1-\alpha)\omega(1+r)}\right] - 24\frac{\gamma}{1+\gamma+\beta} =$$

$$= 24\frac{1+\beta}{1+\gamma+\beta} - \frac{\gamma}{1+\gamma+\beta}\left[\frac{y_1}{\omega} + \frac{y_2}{\omega(1-\alpha)(1+r)}\right] < n_1$$

que es inferior a la oferta de trabajo sin impuestos. Si la renta del segundo período fuese cero, la oferta de trabajo sería independiente del impuesto sobre la renta.

El nivel óptimo de ahorro, bajo imposición sobre la renta, es:

$$s'' = (1-\alpha)(y_1 + \omega n_1'') - c_1'' =$$

$$= (1-\alpha)y_1 + (1-\alpha)24\omega - \frac{1+\gamma}{1+\gamma+\beta}\left((1-\alpha)y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right) + 24\frac{\omega(1-\alpha)(1+\gamma)}{1+\gamma+\beta} =$$

$$= \frac{\beta}{1+\gamma+\beta}(1-\alpha)y_1 - \frac{1+\gamma}{1+\gamma+\beta}\frac{y_2}{1+r} + 24\omega(1-\alpha)\frac{\beta}{1+\gamma+\beta} < s$$

que es inferior al nivel de ahorro en ausencia de impuestos. Esta expresión muestra, además que, al tender el impuesto hacia cero, el ahorro óptimo tiende al que teníamos sin impuestos.

Un impuesto sobre la renta no financiera del período $\Rightarrow$ disminuye el consumo y el trabajo en dicho período. Al aumentar el tipo impositivo, los descensos se hacen más acusados. Como disminuyen c_1 y n_1, las condiciones de optimalidad nos garantizan que también disminuye c_2.

Hemos visto que el impuesto sobre el consumo es relativamente neutral, en términos macroeconómicos (incide únicamente sobre el nivel de consumo privado), pero no distorsiona otras variables macroeconómicas importantes, como la oferta de trabajo o el ahorro.

El impuesto sobre la renta del trabajo incide no sólo sobre la variable a la que afecta directamente, que es la oferta de trabajo (o demanda de ocio), sino también sobre el consumo y sobre el ahorro.

Modelo de precios flexibles del capítulo 2: el impuesto sobre el consumo sólo produce una disminución de la demanda de bienes (sin afectar al mercado de trabajo ni al nivel de ahorro), que podría compensarse si el gobierno gastase la totalidad de lo recaudado, el impuesto sobre la renta disminuye la demanda agregada, a través de su efecto sobre el consumo, pero también disminuye la oferta agregada, al reducir la oferta de trabajo. Por otra parte, incide negativamente sobre la acumulación de capital al reducir el nivel de ahorro. Si el gobierno gastase toda la recaudación del impuesto sobre la renta, la demanda agregada aumentaría (al contrario de lo que ocurre en el caso del impuesto sobre el consumo), pues una parte de lo que gastase habría sido ahorrado por los agentes privados, si su renta no hubiese estado sujeta a tributación.

El efecto contractivo que sobre el ahorro privado tiene el impuesto sobre la renta no es muy preocupante, por cuanto que el impuesto está siendo utilizado para financiar gasto público que quizá esté siendo dirigido hacia inversión pública.

Queda, en cualquier caso, el efecto distorsionante que el impuesto tiene sobre la oferta de trabajo.

DETERMINANDO EL TIPO DE INTERÉS DE EQUILIBRIO EN UNA ECONOMÍA CON DOS CONSUMIDORES Y DOS PERIODOS

Existen dos agentes representativos con idénticas preferencias pero con dotaciones de bienes diferentes en cada instante:

CONSUMIDOR A:

- Dotación periodo 1: ω_1^A
- Dotación periodo 2: ω_2^A

CONSUMIDOR B:

- Dotación periodo 1: ω_1^B
- Dotación periodo 2: ω_2^B

DOTACIONES TOTALES POR PERIODO:

$$y_1 = \omega_1^A + \omega_1^B$$
$$y_2 = \omega_2^A + \omega_2^B$$

PROBLEMA DEL CONSUMIDOR A:

$$\underset{\{c_1^A, s^A, c_2^A\}}{Max} \ln c_1^A + \beta \ln c_2^A$$

$$\text{sujeto a :} \quad c_1^A + s^A = \omega_1^A$$
$$c_2^A = (1+r)s^A + \omega_2^A$$

Solución al problema:

$$c_1^A = \frac{1}{1+\beta}\left[\omega_1^A + \frac{\omega_2^A}{1+r}\right]$$

$$c_2^A = \frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r)\omega_1^A + \omega_2^A\right]$$

$$s^A = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta\omega_1^A - \frac{\omega_2^A}{1+r}\right]$$

PROBLEMA DEL CONSUMIDOR B:

$$\underset{\{c_1^B, s^B, c_2^B\}}{Max} \ln c_1^B + \beta \ln c_2^B$$

$$\text{sujeto a :} \quad c_1^B + s^B = \omega_1^B$$

$$c_2^B = (1+r)s^B + \omega_2^B$$

Solución al problema:

$$c_1^B = \frac{1}{1+\beta}\left[\omega_1^B + \frac{\omega_2^B}{1+r}\right]$$

$$c_2^B = \frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r)\omega_1^B + \omega_2^B\right]$$

$$s^B = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta\omega_1^B - \frac{\omega_2^B}{1+r}\right]$$

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO (lo que un agente ahorra es lo que pide prestado el otro agente):

$$s^A + s^B = 0 \Leftrightarrow s = 0 \Leftrightarrow c_1 = y_1, c_2 = y_2, \text{ donde } c_1 = c_1^A + c_1^B, c_2 = c_2^A + c_2^B$$

De la condición de equilibrio obtenemos el tipo de interés de equilibrio:

$$\frac{1}{1+\beta}\left[\beta\omega_1^A-\frac{\omega_2^A}{1+r}\right]+\frac{1}{1+\beta}\left[\beta\omega_1^B-\frac{\omega_2^B}{1+r}\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\beta\left[\omega_1^A+\omega_1^B\right]-\frac{1}{1+r}\left[\omega_2^A+\omega_2^B\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1+r)^E=\frac{y_2}{\beta y_1}\qquad=\qquad\frac{c_2}{\beta c_1}=RMS_{c_1,c_2}$$

Por tanto:

$$c_1^A=\frac{1}{1+\beta}\left[\omega_1^A+\frac{\beta\omega_2^A y_1}{y_2}\right]$$

$$c_2^A=\frac{\beta}{1+\beta}\left[\omega_2^A+\frac{\omega_1^A y_2}{\beta y_1}\right]$$

$$c_1^B=\frac{1}{1+\beta}\left[\omega_1^B+\frac{\beta\omega_2^B y_1}{y_2}\right]$$

$$c_2^B=\frac{\beta}{1+\beta}\left[\omega_2^B+\frac{\omega_1^B y_2}{\beta y_1}\right]$$

Un caso particular: si $\omega_1^A=y_1,\ \omega_2^A=0,\ \omega_1^B=0,\ \omega_2^B=y_2\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1^A=\dfrac{1}{1+\beta}y_1;\ c_2^A=\dfrac{1}{1+\beta}y_2\\[2ex] c_1^B=\dfrac{\beta}{1+\beta}y_1;\ c_2^B=\dfrac{\beta}{1+\beta}y_2\end{cases}$$

$$\text{Si}\quad y_1=y_2=y\Rightarrow\begin{cases}c_1^A=c_2^A=\dfrac{1}{1+\beta}y\\[2ex] c_1^B=c_2^B=\dfrac{\beta}{1+\beta}y\end{cases}$$

<u>DEFINICIÓN DE EQUILIBRIO GENERAL</u> (bajo utilidad logarítmica)

Bajo el supuesto de que las dotaciones de bienes son no almacenables:
Un **equilibrio competitivo** es un tipo de interés $\{r\}$ y unas asignaciones $\{c_1, c_2\}$ tales que:

a) el consumidor maximiza su utilidad sujeto a la restricción presupuestaria, tomando como dado el tipo de interés

$$c_2 = \beta\,(1+r)\,c_1$$

b) la oferta se iguala a la demanda en los dos periodos:

$$c_t = y_t\,,\ t = 1,2 \Leftrightarrow s = 0$$

Utilizando un simple modelo de generaciones solapadas para modelizar sistemas de pensiones (del libro Lectures in Macroeconomics de O. Blanchard y S. Fischer, Ed. MIT Press)

1. El modelo de generaciones solapadas

Principales supuestos:

- Los individuos viven dos periodos
- La economía se compone en cada instante t de dos cohortes o generaciones: la *joven* y la *vieja*.
-

1.1. Equilibrio descentralizado

Hogares:

- Un individuo nacido en t consume $c_{1,t}$ unidades en el periodo t y $c_{2,t+1}$ unidades en el periodo t+1.
- La utilidad del individuo nacido en el periodo t es
$$U(c_{1,t}, c_{2,t+1}) = u(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\theta} u(c_{2,t+1}), \quad u'(.) > 0, u''(.) < 0, \theta \geq 0$$
- Los individuos sólo trabajan en el primer periodo de vida ofreciendo inelásticamente una unidad de trabajo y ganando un salario igual a ω_t .
- Consumen parte de la renta obtenida en el primer periodo y ahorran el resto para financiar su consumo en su 2º periodo de vida cuando se jubilan.
- El ahorro de los jóvenes en el periodo t genera stock de capital que es utilizado por las empresas para producir output en t+1 en combinación con el trabajo ofrecido por la generación joven del periodo t+1.
- El número de individuos nacidos en t y que trabajan en t es N_t (no hay paro en esta economía). La población crece a la tasa constante n, lo que implica que $N_{t+1} = (1+n)N_t$, es decir, $N_t = (1+n)^t N_0$.
- Las empresas actúan competitivamente y utilizan una tecnología de rendimientos constantes a escala: $Y = F(K, N)$, donde el output por trabajador, *Y/N*; está dado por la función de producción $y = f(k), y = Y / N, k = K / N$.
- El problema al que se enfrentan los hogares es:
$$\underset{\{c_{1,t}, c_{2,t+1}\}}{Max} u(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\theta} u(c_{2,t+1})$$
sujeto a: $c_{1,t} + s_t = \omega_t$
$$c_{2,t+1} = (1 + r_{t+1})s_t$$
cuya condición de Euler es
$$u'(c_{1,t}) = \frac{1}{1+\theta}(1 + r_{t+1})u'(c_{2,t+1})$$

Un par de ejemplos:

- Si $u(c)=\ln c$, entonces las decisiones de consumo y ahorro del individuo serán:

$$c_{1,t}=\frac{(1+\theta)\omega_t}{2+\theta};\quad c_{2,t+1}=\frac{(1+r_{t+1})\omega_t}{2+\theta};\quad s_t=\frac{\omega_t}{2+\theta}$$

Nótese que:

$$\frac{\partial s_t}{\partial \omega_t}=\frac{1}{2+\theta}>0$$

$$\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}}=0$$

- Si $u(c)=\dfrac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ entonces las decisiones de consumo y ahorro del individuo serán:

$$c_{1,t}=\frac{\omega_t}{1+\dfrac{(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\sigma}-1}}{(1+\theta)^{\frac{1}{\sigma}}}};\quad c_{2,t+1}=\frac{\omega_t}{\left(\dfrac{1+\theta}{1+r_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}+\dfrac{1}{1+r_{t+1}}};$$

$$s_t=\omega_t\left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\sigma}-1}}{(1+\theta)^{\frac{1}{\sigma}}+(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\sigma}-1}}\right);$$

Nótese que:

$$\frac{\partial s_t}{\partial \omega_t}=\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\sigma}-1}}{(1+\theta)^{\frac{1}{\sigma}}+(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\sigma}-1}}>0$$

$$\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}}=\frac{\left(\dfrac{1}{\sigma}-1\right)(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\sigma}-1}(1+\theta)^{\frac{1}{\sigma}}}{\left[(1+\theta)^{\frac{1}{\sigma}}+(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\sigma}-1}\right]^2}\gtreqless 0$$

- Por tanto, el ahorro será una función del tipo: $s_t=s(\omega_t,r_{t+1}),\quad 0<s_w<1,\ s_r\lesseqgtr 0$. Este último resultado se explica como sigue: un aumento en el tipo de interés disminuye el precio del consumo del 2º periodo, conduciendo a los individuos a cambiar consumo del primer al segundo periodo (efecto sustitución); pero también incrementa el conjunto de consumos factibles, haciendo posible incrementar el consumo en ambos periodos (efecto renta).

Empresas

Éstas actúan competitivamente, contratando trabajo hasta que la productividad marginal del trabajo se iguala al salario, y alquilan capital hasta que la productividad marginal del capital se iguala a su coste (el tipo de interés):

$$\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial N_t} = \omega_t \Leftrightarrow f(k_t) - k_t f'(k_t) = \omega_t$$

$$\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} = r_t \Leftrightarrow f'(k_t) = r_t$$

Equilibrio en el mercado de bienes

En el equilibrio de una economía cerrada y sin sector público, debe ocurrir que la inversión se iguale al ahorro, es decir:

$$\left.\underbrace{\text{Inversión}}_{K_{t+1}-K_t} = \underbrace{\text{Ahorro}}_{\underbrace{N_t s(\omega_t, r_{t+1})}_{\text{ahorro del joven}} - \underbrace{K_t}_{\text{desahorro del viejo}}}\right\} \Rightarrow \frac{K_{t+1}}{N_t} = s\left(\omega_t, r_{t+1}\right) \Rightarrow$$

$$(1+n)k_{t+1} = s\left(\omega_t, r_{t+1}\right) \qquad (1)$$

Dinámica y estado estacionario

De la ecuación (1), y bajo el equilibrio competitivo, se tiene que

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} s\left[f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1}) \right] \qquad (2)$$

Esta ecuación resume el comportamiento dinámico del capital per cápita; toda vez que sabemos cómo evoluciona el capital, sabremos cómo evoluciona a lo largo del tiempo el ahorro, el salario, los tipos de interés y las decisiones de consumo, ya que podemos poner todas estas variables en función del capital per cápita.

El comportamiento dinámico del capital depende de la derivada dk_{t+1}/dk_t, de modo que si $\left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right| < 1$ entonces la dinámica del capital será estable, esto es, convergerá a su valor de estado estacionario (éste es aquel valor del capital tal que si se alcanza, el capital permanecerá constante en ese nivel si nada cambia en la economía modelizada). Además, si $0 < \frac{dk_{t+1}}{dk_t} < 1$, entonces la dinámica del capital será estable y no oscilatoria, es decir, que si el stocks de capital per cápita actual estuviera por encima (debajo) del stock de capital per cápita de estado estacionario, el capital convergería al estado estacionario de modo que <u>siempre</u> el capital en cada periodo sería mayor o igual (menor o igual) que el de estado estacionario.

Para calcular $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$, basta diferenciar (2) respecto del capital en *t* y en *t*+1 para obtener:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = -\frac{s_w k_t f''(k_t)}{1+n-s_r f''(k_{t+1})}, \quad \text{donde} \begin{cases} s_w \equiv \dfrac{\partial s(\omega_t, r_{t+1})}{\partial \omega_t} \\ s_r \equiv \dfrac{\partial s(\omega_t, r_{t+1})}{\partial r_{t+1}} \end{cases}$$

Un ejemplo:

$$\text{Sea } \left\{ \begin{array}{l} f(k_t) = k_t^{\alpha},\ \alpha \in (0,1) \\ u(c_t) = \ln c_t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_t = \dfrac{1-\alpha}{2+\theta} k_t^{\alpha}, \\ k_{t+1} = \dfrac{1}{1+n} \dfrac{1-\alpha}{2+\theta} k_t^{\alpha} \end{array} \right.$$

$$\text{Por tanto, } \left\{ \begin{array}{l} \text{El capital de estado estacionario es: } k^* = \left[\dfrac{1-\alpha}{(1+n)(2+\theta)} \right]^{1/(1-\alpha)} \\ \dfrac{dk_{t+1}}{dk_t} = \dfrac{\alpha}{1+n} \dfrac{1-\alpha}{2+\theta} k_t^{\alpha-1} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{en el estado estacionario}} \left. \dfrac{dk_{t+1}}{dk_t} \right|_{ee} = \alpha \in (0,1) \end{array} \right.$$

En definitiva, en este caso, la dinámica del capital será estable y no oscilatoria.

1.2. El problema del Planificador

- Supongamos un planificador benevolente que se preocupa de las T+1 generaciones presente y futuras y descuenta las generaciones futuras a la tasa R.

- Función de bienestar social:

$$U = \frac{1}{1+\theta} u(c_{2,0}) + \sum_{t=0}^{T-1} (1+R)^{-t-1} \left[u(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\theta} u(c_{2,t+1}) \right]$$

- Restricción de recursos:

$$\underbrace{F(K_t, N_t)}_{\substack{\text{Suponemos una función} \\ \text{de producción neta de} \\ \text{depreciación}}} = \underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\substack{\text{Ahorro Neto o} \\ \text{Inversión Neta}}} + \underbrace{N_t c_{1,t} + N_{t-1} c_{2,t}}_{\substack{\text{Consumo del periodo } t \text{ es} \\ \text{el consumo de los jóvenes} \\ \text{actuales más el consumo de} \\ \text{los viejos actuales}}} \Rightarrow$$

$$f(k_t) = (1+n)k_{t+1} - k_t + c_{1,t} + \frac{1}{1+n} c_{2,t}$$

- Problema del Planificador

$$\underset{\left\{ \{c_{1,t}, c_{2,t+1}\}_{t=0}^{T-1} \cup c_{2,T} \cup c_{2,0} \right\}}{Max} \frac{1}{1+\theta} u(c_{2,0}) + \sum_{t=0}^{T-1} (1+R)^{-t-1} \left[u(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\theta} u(c_{2,t+1}) \right]$$

sujeto a: $f(k_t) = (1+n)k_{t+1} - k_t + c_{1,t} + \dfrac{1}{1+n} c_{2,t}, \quad t = 0,1,...T-1$

$k_0,\ k_{T+1}$ dados

Condiciones de Optimalidad:

$$\frac{1+\theta}{1+R}\frac{u'(c_{1,t})}{u'(c_{2,t})}=(1+n) \qquad (3)$$

$$u'(c_{1,t})=\frac{1}{1+\theta}\left[1+f'(k_{t+1})\right]u'(c_{2,t+1}) \qquad (4)$$

Nótese que (4) coincide con la ecuación de Euler del problema del consumidor en el equilibrio competitivo (cuando $r_{t+1}=f'(k_{t+1})$). Sin embargo, esto no implica que la solución del planificador coincida con la del equilibrio competitivo, ya que éste no satisfará en general la expresión (3).

Estado Estacionario: se trata de resolver el siguiente sistema para $\{k^*, c_1^*, c_2^*\}$ usando la restircción de recursos junto con (3) y (4):

$$(1+n)(1+R)=1+f'(k^*)$$

$$nk^* = f(k^*)-c_1^*-\frac{1}{1+n}c_2^*$$

$$(1+\theta)(1+R)^{-1}u'(c_1^*)=(1+n)u'(c_2^*)$$

- Acabamos de mostrar que en el óptimo del planificador, con R>0, la economía converge a un estado estacionario donde

$$(1+n)(1+R)=1+f'(k^*)\,. \qquad (5)$$

Ya que R es un parámetro arbitrario, es decir, no relacionado con las preferencias de los individuos representadas por su función de utilidad, difícilmente el stock de capital obtenido del problema del planificador será igual al de la economía descentralizada. Así, podemos preguntarnos si un estado estacionario, incluso si no satisface (5), es al menos un óptimo de Pareto, es decir, si es posible reasignar recursos de manera que al menos algún hogar mejore y ninguno empeore:

Volvamos a la restricción de recursos:

$$k_t+f(k_t)=(1+n)k_{t+1}+\underbrace{c_{1,t}+(1+n)^{-1}c_{2,t}}_{c_t}\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{bajo el estado estacionario}}\ f(k^*)-nk^*=c^*\Rightarrow$$

$$\frac{dc^*}{dk^*}=\underbrace{f'(k^*)}_{r^*}-n \lesseqgtr 0.$$ Llamemos k^*_{RO} (capital de la *regla de oro*), al capital que resuelve la ecuación $\frac{dc^*}{dk^*}=f'(k^*)-n=0$. Si el stock de capital de estado estacionario de una economía excede el nivel dado por la regla de oro, una disminución en el stock de capital incrementará el consumo de estado estacionario. Es más, si en el instante t estamos en un estado estacionario con un stock de capital que supera el de la regla de oro y reducimos el stock de capital desde t+1 en adelante, tanto el consumo actual como los consumos de los periodos siguientes aumentarán:

De la restricción de recursos:
* Una disminución en k_{t+1} implica $dc_t = -(1+n)dk > 0$
* Una disminución permanente en $k_{t+i}, i > 0 \Rightarrow dc_{t+i} = (f'(k^*) - n)dk > 0,$ sólo si $f' < n$

Por tanto, una economía que tenga un stock de capital por encima del de la regla de oro, no será óptima de Pareto, ya que podríamos disminuir su stock de capital pudiendo tener esa economía un mayor nivel de consumo (y por tanto, más bienestar) en todos los periodos; ese mayor consumo en cada periodo podría repartirse de alguna forma entre las dos generaciones que conviven, de modo que todos los individuos nunca estarán peor, y algunos, al menos, estarán mejor. A esta economía con un stock de capital más alto que el de la regla de oro se la denomina *dinámicamente ineficiente*.

Una economía de mercado podría ser dinámicamente ineficiente: por ejemplo, supongamos que $u(c) = \ln c$ y $f(k) = Ak^{\alpha} - \delta k$; para estas funciones, el tipo de interés de estado estacionario en el equilibrio competitivo sería: $r^* = \left[\dfrac{\alpha(1+n)(2+\theta)}{1-\alpha}\right] - \delta$; es fácil comprobar que $r^* \lesseqgtr n$. Si $r^* < n$ entonces esta economía de mercado sería dinámicamente ineficiente.

2. Modelizando pensiones

La introducción de Seguridad Social en este modelo afectará a la decisión de ahorro y, por tanto, a la acumulación de capital.

Las condiciones de equilibrio competitivo de la economía descentralizada que estudiamos al principio de estas notas son:

$$u'(\underbrace{\omega_t - s_t}_{c_{1,t}}) = (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'\left((1+r_{t+1})s_t\right) \qquad (6)$$

$$s_t\left(\omega_t, r_{t+1}\right) = (1+n)k_{t+1} \qquad (2)$$

$$\omega_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

$$r_{t+1} = f'(k_{t+1})$$

Ahora examinamos cómo la introducción de seguridad social modifica estas condiciones de equilibrio:

- Los individuos realizan una contribución a la seguridad social cuando son jóvenes y reciben pagos de la seguridad social cuando son viejos.
- Sea d_t la contribución de una persona joven en *t*, y sea b_t la pensión recibida por una persona vieja en *t*.
- Hay dos formas alternativas de construir un sistema de seguridad social:

i) Sistema de capitalización (“fully funded”). Las contribuciones del joven en t son invertidas y devueltas con intereses en t+1, cuando son viejos. En este caso, $b_t = \underbrace{(1+r_t)}_{\substack{\text{tasa de rendimiento bruta}\\ \text{de las contribuciones}\\ \text{a la seguridad social}}} d_{t-1}$.

ii) Sistema de reparto (“unfunded system” or “pay as you go system”): transfiere las contribuciones hechas por los jóvenes directamente a los viejos actuales tal que $b_t = \underbrace{(1+n)}_{\substack{\text{"tasa de rendimiento bruta"}\\ \text{de las contribuciones}\\ \text{a la seguridad social}}} d_t$

2.1. Sistema de capitalización

El gobierno en el periodo t obtiene d_t en contribuciones de los jóvenes, invierte estas contribuciones en capital y paga $b_t = (1+r_t)d_{t-1}$ a los viejos, cuya contribución fue invertida en t-1.

En esta situación las condiciones (6) y (2) son:

$$u'(\omega_t - (s_t + d_t)) = (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'\left((1+r_{t+1})(s_t + d_t)\right) \qquad (6')$$

$$s_t + d_t = (1+n)k_{t+1} \qquad (2')$$

El stock de capital que resuelve el sistema {(6’), (2’)} es el mismo que resuelve {(6), (2)}. Por tanto, *el sistema de capitalización no tiene efectos sobre la acumulación de capital ni sobre el ahorro*, porque el sistema de seguridad social rinde el mismo interés que el de mercado. El consumidor será indiferente sobre cómo distribuir su ahorro.

2.2. Sistema de reparto

Las cosas son bastante diferentes cuando la seguridad social no es de capitalización. En este caso, las ecuaciones (6) y (2) son, usando $b_{t+1} = (1+n)d_{t+1}$,

$$u'(\omega_t - (s_t + d_t)) = (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'\left((1+r_{t+1})s_t + (1+n)d_{t+1}\right) \qquad (6'')$$

$$s_t = (1+n)k_{t+1} \qquad (2'')$$

Desde el punto de vista del individuo, la tasa de rendimiento del ahorro de la seguridad social es n en lugar de r. El gobierno puede pagar una tasa de rendimiento n porque en cada periodo hay más gente viva para hacer contribuciones al sistema de seguridad social.

Debido a que la seguridad social en el sistema de reparto es un sistema de transferencia puro, en esta economía no se ahorra todo lo que no se consume, por lo que la única fuente de capital para la economía es el ahorro privado s_t. Es decir, en esta economía se ahorrará menos que en una economía con un sistema de capitalización. Veámoslo: si diferenciamos (6’’) y suponemos que $d_t = d_{t+1}$ (contribuciones constantes) se tiene que:

$$\frac{ds_t}{dd_t} = -\frac{u_1'' + u_2''(1+n)(1+\theta)^{-1}}{u_1'' + u_2''(1+r_{t+1})(1+\theta)^{-1}} < 0,$$

$$\text{donde } u_1'' = \frac{\partial u'}{\partial c_{1,t}}, u_2'' = \frac{\partial u'}{\partial c_{2,t+1}}$$

Nótese que $\left|\frac{ds_t}{dd_t}\right| \lesseqgtr 1$ si $n \lesseqgtr r_{t+1}$. Por tanto, las contribuciones a la seguridad social disminuyen el ahorro privado (si lo disminuyen más o menos que proporcionalmente depende de si $n \lesseqgtr r$). esto implicará que el stock de capital será menor y por tanto, menor será el salario y mayor el tipo de interés.

¿Es un resultado deseable pasar de un sistema de capitalización a un sistema de reparto? La respuesta a esta pregunta se relaciona completamente con la sobre-acumulación de capital que estudiábamos anteriormente cunado definíamos una economía dinámicamente ineficiente. Así, sólo si bajo el sistema de capitalización estábamos sobre-acumulando capital por encima de la regla de oro, pasar a un sistema de reparto generará mayor bienestar. Es decir, si $r < n$ (ineficiencia dinámica), pasar a un sistema de reparto reducirá el stock de capital reduciendo o eliminando la ineficiencia dinámica y mejorando a todas las generaciones. Si $r > n$ antes de introducir el sistema de reparto, entonces el esquema de pensiones mejorará la primera generación de viejos, empeorando al resto de las generaciones.